Lezione 3

Funzione di trasferimento

Calcolo della risposta di un sistema dinamico lineare

Per il calcolo della risposta (uscita) di un sistema dinamico **lineare** soggetto ad ingressi assegnati, si possono seguire due strade.

Calcolo nel "dominio del tempo"

Con i metodi dell'analisi matematica, si integra il sistema di equazioni differenziali (equazioni di stato) forzato dalle funzioni del tempo assegnate (gli ingressi). Dalla trasformazione di uscita si ricava quindi l'espressione dell'uscita.

Calcolo nel "dominio delle trasformate"

Alla funzione del tempo $u(t)$ si associa, con i metodi matematici che vedremo, una funzione U che prende il nome di **trasformata** del segnale[1] di ingresso. Dalle equazioni del sistema dinamico è poi possibile ricavare facilmente il legame tra la trasformata U e la trasformata Y del segnale di uscita. Ricavata quindi la trasformata Y, le si associa la funzione del tempo $y(t)$, che ne costituisce l'**antitrasformata**, e che rappresenta la risposta del sistema cercata.

Fig. 1 : Calcolo della risposta di un sistema dinamico lineare

Qual è il vantaggio del metodo di calcolo nel dominio delle trasformate ?

Il vantaggio, notevolissimo, è che il legame tra la trasformata dell'ingresso e la trasformata dell'uscita è di natura **algebrica** e **non differenziale**, come accade invece tra le rispettive funzioni del tempo.

---

[1]Con il termine "segnale" intendiamo una variabile, scalare, funzione del tempo.

Trasformata di Laplace

Si consideri una funzione reale $f(t)$ della variabile reale t, definita per $t \geq 0$.

La funzione della **variabile complessa** s:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

si dice **trasformata di Laplace** di $f(t)$ e si indica con $\mathcal{L}[f(t)]$. La trasformata esiste, in generale, solo per un insieme di valori di s.

Esempio

Si consideri la funzione **scalino**:

$$f(t) = sca(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

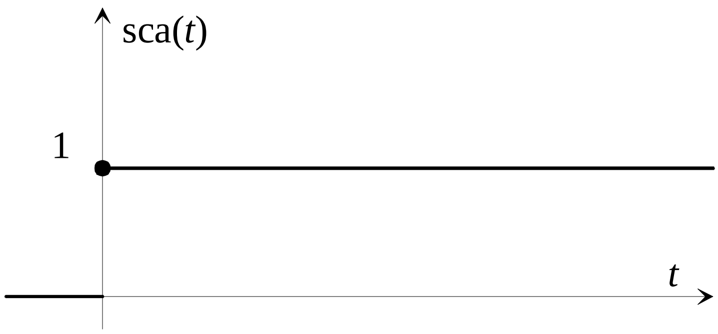

Fig. 2 : La funzione scalino

$$\mathcal{L}[\mathrm{sca}(t)] = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Si noti che l'ultima eguaglianza è vera quando s è un numero complesso a parte reale positiva (cioè nel semipiano destro del piano complesso).

Esempio

Si consideri la funzione **impulso**:

$$f(t) = \mathrm{imp}(t) = 0, \quad \forall t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

Tale funzione può essere vista come il limite, per $\varepsilon \to 0$, della seguente funzione:

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$$

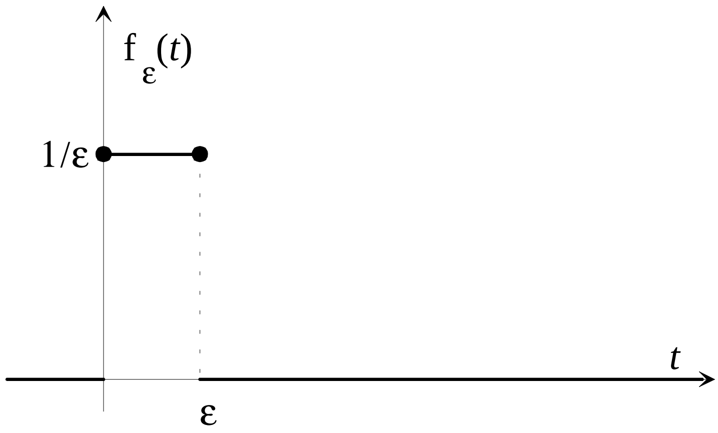

Fig. 3 : La funzione di cui l'impulso costituisce il limite

$$\mathcal{L}[\mathrm{imp}(t)] = \int_0^{\infty} \mathrm{imp}(t) e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\infty} f_\varepsilon(t) e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{s e^{-s\varepsilon}}{s} = 1$$

Proprietà notevoli della trasformata

- Linearità

$\mathcal{L}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$.

- Traslazione nel dominio della variabile complessa

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,

allora $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$.

- Traslazione nel dominio del tempo

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,

allora $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s)$, per $\tau \geq 0$.

- Derivazione nel dominio del tempo

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,

allora $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f\left(0^+\right)$.

- Derivazione nel dominio della variabile complessa

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,

allora $\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$.

Trasformate notevoli

$f(t)$, $t \ge 0$	$F(s)$
$\mathrm{imp}(t)$	1
$\mathrm{sca}(t)$	$1/s$
$\mathrm{ram}(t)$	$1/s^2$
$\mathrm{par}(t)$	$1/s^3$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin(\omega t)$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$s/(s^2+\omega^2)$

dove:

$$\mathrm{ram}(t) = \begin{cases} t & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \mathrm{par}(t) = \begin{cases} t^2/2 & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Poli e zeri

I poli di una trasformata $F(s)$ sono i valori di s per cui $|F(s)| = \infty$.

Gli zeri di una trasformata $F(s)$ sono i valori di s per cui $F(s) = 0$.

Se $F(s)$ è *razionale*, ossia esprimibile come rapporto di due polinomi in s,

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

i poli sono le radici del denominatore $D(s)$, gli zeri le radici del numeratore $N(s)$.

Antitrasformata di Laplace

Data una funzione $F(s)$ di variabile complessa, si vuole determinare la funzione $f(t)$ di cui $F(s)$ costituisce la trasformata.

I seguenti due teoremi forniscono informazioni parziali su $f(t)$.

Teorema del valore iniziale

Se $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$,

allora $f\left(0^+\right) = \lim\limits_{s \to \infty} [sF(s)]$.

Se, ad esempio,

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{2s^3 + 3s^2 + 4} ,$$

allora $f\left(0^+\right) = \lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{s^3 + s^2 + s}{2s^3 + 3s^2 + 4} = \dfrac{1}{2}$.

Teorema del valore finale

Se $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$, e $F(s)$ è razionale e ha poli tutti a parte reale negativa oppure nell'origine del piano complesso, allora

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} [sF(s)].$$

Se, ad esempio,

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{2s^3 + 3s^2 + s} ,$$

$F(s)$ ha poli in 0, –1/2 e –1, per cui il teorema è applicabile, e risulta:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 + s + 1}{2s^2 + 3s + 1} = 1 .$$

Metodo di Heaviside per funzioni razionali

Consente di ricavare l'espressione analitica dell'antitrasformata quando la trasformata è una funzione razionale, ossia un rapporto di polinomi in s:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} .$$

Il metodo viene qui presentato solo per alcuni casi particolari.

1) Poli reali semplici

Il denominatore è fattorizzabile come:

$$D(s)=(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n), \quad p_i \in \Re, \quad p_i \neq p_j \ .$$

Ne consegue:

$$F(s)=\frac{\alpha_1}{s+p_1}+\frac{\alpha_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s+p_n}$$

Si ricavano i coefficienti α_1, ..., α_n mediante confronto tra questa espressione e l'espressione originaria di $F(s)$. Infine si antitrasformano i singoli termini:

$$f(t)=\alpha_1 e^{-p_1 t}+\alpha_2 e^{-p_2 t}+\cdots+\alpha_n e^{-p_n t}, \quad t \geq 0 \ .$$

2) Poli reali semplici e un polo reale multiplo

Il denominatore è fattorizzabile come:

$$D(s)=(s+p_1)^k(s+p_2)\cdots(s+p_m), \quad p_i \in \Re, \quad p_i \neq p_j, \quad m=n-(k-1) \ .$$

Ne consegue:

$$F(s)=\frac{\alpha_{1k}}{(s+p_1)^k}+\frac{\alpha_{1(k-1)}}{(s+p_1)^{k-1}}+\cdots+\frac{\alpha_{11}}{s+p_1}+\frac{\alpha_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{\alpha_m}{s+p_m}$$

Si ricavano i coefficienti α_{1k}, ..., $\alpha_{11,}$ α_2 ..., α_m mediante confronto tra questa espressione e l'espressione originaria di $F(s)$. Infine si antitrasformano i singoli termini:

$$f(t)=\alpha_{1k}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-p_1 t}+\alpha_{1(k-1)}\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}e^{-p_1 t}+\cdots+\alpha_{11}e^{-p_1 t}+\alpha_2 e^{-p_2 t}+\cdots+\alpha_m e^{-p_m t}, \quad t \geq 0 \ .$$

3) Poli reali semplici e due poli complessi e coniugati semplici

Il denominatore è fattorizzabile come:

$$D(s)=(s+p_1)(s+\bar{p}_1)(s+p_2)\cdots(s+p_m), \quad p_i \in \Re \ (i \geq 2), \quad p_i \neq p_j, \quad m=n-1 \ .$$

Ne consegue (posto $p_1 = \sigma + j\omega$):

$$F(s)=\frac{\alpha_1}{s+p_1}+\frac{\bar{\alpha}_1}{s+\bar{p}_1}+\frac{\alpha_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{\alpha_m}{s+p_m}=\frac{\beta s+\gamma}{s^2+2\sigma s+\sigma^2+\omega^2}+\frac{\alpha_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{\alpha_m}{s+p_m}=$$

$$=\beta\frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2}+\frac{-\beta\sigma+\gamma}{\omega}\frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}+\frac{\alpha_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{\alpha_m}{s+p_m}$$

con β e γ parametri reali opportuni. Si ricavano i coefficienti β, γ, α_2, ..., α_n mediante confronto tra questa espressione e l'espressione originaria di $F(s)$. Infine si antitrasformano i singoli termini:

$$f(t)=\beta e^{-\sigma t}\cos(\omega t)+\frac{-\beta\sigma+\gamma}{\omega}e^{-\sigma t}\sin(\omega t)+\alpha_2 e^{-p_2 t}+\cdots+\alpha_m e^{-p_m t}, \quad t \geq 0 \ .$$

Funzione di trasferimento

Consideriamo un sistema dinamico lineare in forma vettoriale:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\end{aligned}, \qquad \boldsymbol{x}\in\Re^n,\ \boldsymbol{u}\in\Re^m,\ \boldsymbol{y}\in\Re^p$$

Introduciamo i vettori $\boldsymbol{X}(s)$, $\boldsymbol{U}(s)$, $\boldsymbol{Y}(s)$ che contengono le trasformate di Laplace delle componenti dei vettori $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$, rispettivamente.

Osservando che risulta:

$$\mathcal{L}[\dot{\boldsymbol{x}}(t)]=\begin{bmatrix}\mathcal{L}[\dot{x}_1(t)]\\ \mathcal{L}[\dot{x}_2(t)]\\ \vdots\\ \mathcal{L}[\dot{x}_n(t)]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}sX_1(s)-x_1(0)\\ sX_2(s)-x_2(0)\\ \vdots\\ sX_n(s)-x_n(0)\end{bmatrix}=s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)]=\begin{bmatrix}\mathcal{L}[a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\ldots+a_{1n}x_n(t)]\\ \mathcal{L}[a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\ldots+a_{2n}x_n(t)]\\ \vdots\\ \mathcal{L}[a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\ldots+a_{nn}x_n(t)]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}X_1(s)+a_{12}X_2(s)+\ldots+a_{1n}X_n(s)\\ a_{21}X_1(s)+a_{22}X_2(s)+\ldots+a_{2n}X_n(s)\\ \vdots\\ a_{n1}X_1(s)+a_{n2}X_2(s)+\ldots+a_{nn}X_n(s)\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)$$

e analogamente per le altre trasformate di prodotti matrice-vettore, si ottiene, sfruttando la linearità della trasformata:

$$\begin{aligned}s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{x}(0)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)\\ \boldsymbol{Y}(s)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)\end{aligned}$$

Si è quindi ottenuto un sistema **algebrico** nelle trasformate delle variabili. Per tutti i valori di s diversi dagli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}$, risulta:

$$\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)+(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)$$

e quindi:

$$\boldsymbol{Y}(s)=\left[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\right]\boldsymbol{U}(s)+\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0).$$

Di particolare interesse è la situazione in cui lo stato iniziale è nullo ($\boldsymbol{x}(0)$ = 0). Risulta:

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{U}(s),$$

dove la matrice (di dimensioni $p\times m$):

$$\boldsymbol{G}(s)=\left[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\right]$$

prende il nome di **funzione di trasferimento** del sistema.

Nel caso SISO (m=p=1), la funzione di trasferimento diventa uno scalare e si può scrivere, sempre a stato iniziale nullo:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}\ .$$

La funzione di trasferimento può essere calcolata con la formula precedente (ricavando quindi le matrici ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** e invertendo una matrice $n\times n$) oppure trasformando le singole equazioni membro a membro (a stato iniziale nullo), e ricavando il legame tra $Y(s)$ e $U(s)$ mediante eliminazione delle $X_i(s)$.

Riprendiamo gli esempi di sistemi dinamici elementari trattati in precedenza, limitandoci naturalmente a quelli lineari:

Resistore

$$y(t)=\frac{1}{R}u(t) \quad \Rightarrow \quad G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{R}$$

Induttore

$$\dot{x}_1(t)=\frac{1}{L}u(t)$$

$$y(t)=x_1(t) \quad \Rightarrow \quad G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{Ls}$$

Condensatore

$$\dot{x}_1(t)=\frac{1}{C}u(t)$$

$$y(t)=x_1(t) \quad \Rightarrow \quad G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{Cs}$$

Massa

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t)=\frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t)=x_1(t) \quad \Rightarrow \quad G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{Ms^2}$$

Oscillatore meccanico

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t)=\frac{1}{M}\left(-Kx_1(t)-Dx_2(t)+u(t)\right)$$

$$y(t)=x_1(t) \quad \Rightarrow \quad G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{Ms^2+Ds+K}$$

Serbatoio cilindrico

$$\dot{x}_1(t)=\frac{1}{A_S}u(t)$$

$$y(t)=x_1(t) \quad \Rightarrow \quad G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{A_S s}$$

Struttura della funzione di trasferimento

Si consideri un sistema SISO, per cui la funzione di trasferimento è uno scalare:

$$G(s) = \left[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + D\right].$$

Osserviamo che:

$$(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})}\begin{bmatrix} k_{11}(s) & k_{12}(s) & \cdots & k_{1n}(s) \\ k_{21}(s) & k_{22}(s) & \cdots & k_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}(s) & k_{n2}(s) & \cdots & k_{nn}(s) \end{bmatrix},$$

dove i polinomi $k_{ij}(s)$ sono i complementi algebrici della matrice $(s\boldsymbol{I}_n – \boldsymbol{A})$ ed hanno, per costruzione, grado non superiore a $n–1$ (mentre il determinante a denominatore ha ovviamente grado n).

Nel formare lo scalare $\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$ si combinano linearmente i polinomi k_{ij}, ottenendo un polinomio che non può avere grado maggiore dei singoli polinomi. A questa espressione va poi sommato D, se il sistema non è strettamente proprio.

Concludiamo quindi che la funzione di trasferimento è razionale (rapporto di polinomi):

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

che il denominatore $D(s)$ ha grado n, mentre per il numeratore:

$$N(s) = \left\langle \begin{array}{l} \text{polinomio di grado } \le (n-1), \text{ se il sistema è strett. proprio } (D = 0) \\ \text{polinomio di grado } = n, \text{ se il sistema non è strett. proprio } (D \ne 0) \end{array} \right.$$

Si osservi quindi che il grado del numeratore non può mai eccedere quello del denominatore.

Si ricorda inoltre che un polinomio di grado n a coefficienti reali ammette nel piano complesso n radici, reali o a coppie complesse e coniugate (teorema fondamentale dell'algebra).

Gli **zeri** della funzione di trasferimento sono le radici del numeratore $N(s)$ (e quindi sono in numero minore o uguale a n).

I **poli** della funzione di trasferimento sono le radici del denominatore $D(s)$ (e quindi sono in numero uguale a n). I poli, in quanto radici del determinante della matrice $(s\boldsymbol{I}_n–\boldsymbol{A})$, coincidono con gli **autovalori** della matrice $\boldsymbol{A}$.

Queste conclusioni non contemplano esplicitamente il caso in cui numeratore e denominatore abbiano una o più radici comuni. Nel formare l'espressione della funzione di trasferimento tali radici si semplificano, per cui il denominatore avrà grado minore di n (e il numeratore grado minore o uguale a quello del denominatore). In questo caso i poli della funzione di trasferimento formano un sottoinsieme degli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}$.

Nel piano complesso, i poli vengono di norma rappresentati con una crocetta, gli zeri con un pallino. La funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s^2+1}{s^3+3s^2+2s} \ ,$$

presenta due zeri, in $s = -j$ e $s = j$, e tre poli, in $s = 0$, $s = -1$ e $s = -2$, rappresentati come in figura:

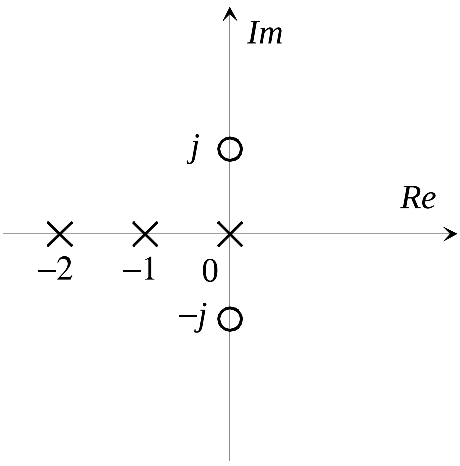

Fig. 4 : Disposizione di poli e zeri.

Parametri caratteristici della funzione di trasferimento

Si è visto che la funzione di trasferimento di un sistema dinamico è una funzione razionale della variabile complessa *s*, ossia è il rapporto di due polinomi:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_n}{s^n + \gamma_1 s^{n-1} + \cdots + \gamma_n}\ .$$

Alternativamente si può utilizzare la seguente espressione equivalente:

$$G(s) = \rho \frac{\prod_i (s + z_i)}{\prod_i (s + p_i)}\ .$$

dove le produttorie corrono su tutti gli zeri e su tutti i poli, rispettivamente, mentre:

ρ: **costante di trasferimento**

$-z_i$: **zeri**

$-p_i$: **poli**

Si osservi che i parametri z_i e p_i possono anche essere complessi. Per ottenere una rappresentazione con solo numeri reali è sufficiente accorpare i termini complessi e coniugati (a numeratore e a denominatore), nei polinomi di secondo grado a radici complesse. Questi polinomi, a loro volta sono espressi per mezzo di due parametri particolarmente significativi, indicati con ζ e ω_n:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\ ,$$

dove ω_n è un numero positivo.

Per comprendere il significato dei due parametri, osserviamo che le radici del polinomio sono:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\ ,$$

e risultano effettivamente complesse e coniugate se $|\zeta| < 1$.

Il significato dei parametri ζ e ω_n è allora illustrato dalla seguente figura:

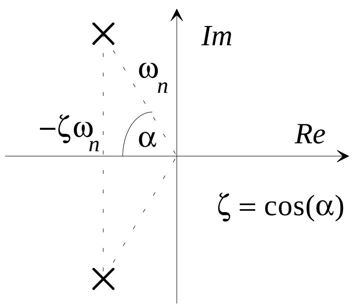

Fig. 5 : Significato dei parametri ζ e ω_n

ω_n, **pulsazione naturale**: è il modulo delle due radici, ossia la loro distanza dall'origine.

ζ, **smorzamento**: è il coseno dell'angolo α formato dalla congiungente l'origine con le radici, rispetto al semiassse reale negativo

Poiché la parte reale dei poli vale $-\zeta\omega_n$ e ω_n è un numero positivo, si ha:

$\zeta>0$: due radici nel semipiano sinistro

$\zeta=0$: due radici sull'asse immaginario

$\zeta<0$: due radici nel semipiano destro

Possiamo a questo punto esprimere la funzione di trasferimento per mezzo di soli parametri reali nella seguente forma:

$$G(s)=\rho\frac{\prod_i(s+z_i)\prod_i\left(s^2+2\zeta_{zi}\omega_{nzi}s+\omega_{nzi}^2\right)}{\prod_i(s+p_i)\prod_i\left(s^2+2\zeta_{pi}\omega_{npi}s+\omega_{npi}^2\right)},$$

con $\omega_{nzi},\omega_{npi}>0,\quad |\zeta_{zi}|,|\zeta_{pi}|\le 1$.

Un'ulteriore espressione della funzione di trasferimento è la seguente:

$$G(s)=\frac{\mu}{s^g}\frac{\prod_i(1+s\tau_i)}{\prod_i(1+sT_i)}$$

dove le produttorie corrono su tutti gli zeri e su tutti i poli diversi da zero, rispettivamente, mentre:

μ: **guadagno**

g: **tipo**

τ_i: **costanti di tempo degli zeri**

T_i: **costanti di tempo dei poli**

Si osservi che il rapporto delle due produttorie valutato in $s = 0$ è pari a 1. Per ottenere questo risultato si sono raggruppati gli eventuali poli o zeri in $s = 0$ nel termine a denominatore s^g. Pertanto g è un numero intero, uguale, se positivo, al numero di poli in s=0, se negativo, al numero di zeri in s=0 (se è nullo non vi sono né poli né zeri in s=0).

Se g=0, risulta inoltre:

$$\mu=\lim_{s\to 0}G(s)=G(0)=-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+D,$$

espressione che prende il nome di **guadagno statico**, in quanto corrisponde al rapporto tra ingresso e uscita all'equilibrio.[2]

Più in generale:

$$\mu=\lim_{s\to 0}\left[s^g G(s)\right].$$

Anche questa forma della funzione di trasferimento può essere espressa in termini solo di parametri reali:

---

[2] All'equilibrio risulta $0=\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\bar{u},\ \bar{y}=\boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}}+D\bar{u}$, per cui, eliminando $\bar{\boldsymbol{x}}$, si ottiene il risultato.

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i) \prod_i \left(1 + 2\frac{\zeta_{zi}}{\omega_{nzi}} s + \frac{s^2}{\omega_{nzi}^2}\right)}{\prod_i (1 + sT_i) \prod_i \left(1 + 2\frac{\zeta_{pi}}{\omega_{npi}} s + \frac{s^2}{\omega_{npi}^2}\right)},$$

con $\omega_{nzi}, \omega_{npi} > 0, \quad |\zeta_{zi}|, |\zeta_{pi}| \leq 1$.

Calcolo delle risposte temporali

Dato un sistema dinamico lineare ed un ingresso trasformabile secondo Laplace, è possibile ricavare l'espressione analitica dell'uscita del sistema dinamico forzata da tale ingresso. Occorre:

1. Ricavare, se non è già data, la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema
2. Ricavare la trasformata $U(s)$ dell'ingresso
3. Calcolare la trasformata dell'uscita $Y(s) = G(s)U(s)$
4. Antitrasformare

Sia ad esempio:

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2+5s+4}, \quad u(t) = \mathrm{sca}(t).$$

Sappiamo allora che:

$$U(s) = \frac{1}{s}, \quad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2s+1}{s\left(s^2+5s+4\right)} = \frac{2s+1}{s(s+1)(s+4)}$$

Applichiamo il metodo di Heaviside per l'antitrasformazione di $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{s+4} = \frac{\alpha_1(s+1)(s+4) + \alpha_2 s(s+4) + \alpha_3 s(s+1)}{s(s+1)(s+4)} = \frac{2s+1}{s(s+1)(s+4)} \quad .$$

Imponendo l'uguaglianza dei due numeratori, in particolare nei punti $s = 0$, $s = -1$, $s = -4$, si ottiene:

$$\left.\begin{array}{r} 4\alpha_1 = 1 \\ -3\alpha_2 = -1 \\ 2\alpha_3 = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = 1/4 \\ \alpha_2 = 1/3 \\ \alpha_3 = -7/12 \end{array}\right.$$

Pertanto:

$$y(t) = \frac{1}{4}\mathrm{sca}(t) + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{7}{12}e^{-4t} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{7}{12}e^{-4t}, \quad t \geq 0.$$

Stabilità

Sia dato un sistema **lineare**, all'equilibrio all'istante t=0.

Si applichi quindi, all'istante t=0¸ un **impulso** all'ingresso del sistema (ossia una perturbazione di ampiezza molto elevata e di durata brevissima).

Si possono presentare tre tipologie di comportamenti per l'andamento temporale dell'uscita y, riportate in figura:

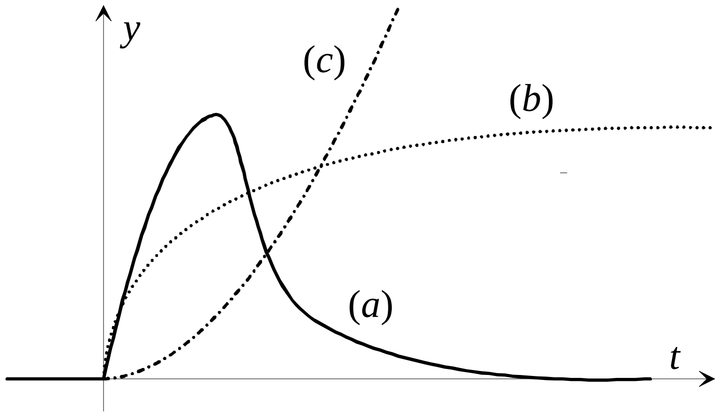

Fig. 6 : Differenti comportamenti della risposta all'impulso

(a) l'uscita converge al valore iniziale (supposto nullo);

(b) l'uscita non converge al valore iniziale, ma non diverge;

(c) l'uscita diverge.

Questi comportamenti corrispondono, rispettivamente, a un sistema:

(a) **asintoticamente stabile**;

(b) **semplicemente stabile** (o stabile, ma non asintoticamente);

(c) **instabile**.

Per i sistemi dinamici lineari, di cui ci stiamo occupando, la stabilità non è legata al particolare punto di equilibrio in cui si trova il sistema nel momento in cui si dà l'impulso in ingresso (tutti i punti di equilibrio sono equivalenti tra di loro). Ciò non è evidentemente vero per un sistema non lineare (si pensi ad un pendolo e ai suoi differenti punti di equilibrio).

Ne consegue che per un sistema lineare la proprietà di stabilità deve essere deducibile dall'espressione matematica del sistema dinamico, ed in particolare dalla **sua funzione di trasferimento**.

Limitiamoci, per brevità, al caso di sistemi con poli semplici (ossia radici non multiple del denominatore). Ricordando che la trasformata dell'impulso vale 1, si ottiene:

$$Y(s)=G(s)U(s)=G(s)=\rho\frac{\prod_i(s+z_i)}{\prod_i(s+p_i)}=\sum_i\frac{\alpha_i}{s+p_i}\ .$$

Antitrasformando, si ricava l’espressione analitica della risposta all’impulso:

$$y(t)=\sum_i\alpha_i e^{-p_i t},\quad t\geq 0\ .$$

Se p_i è complesso, ossia $p_i = \alpha_i + j\beta_i$, risulta:

$$e^{-p_i t}=e^{-\alpha_i t}\left(\cos(\beta_i t)-j\sin(\beta_i t)\right).$$

Naturalmente sarà presente anche il termine coniugato e i contributi immaginari allo sviluppo si elideranno.

Ora, se tutti i poli sono reali negativi (p_i>0) o complessi a parte reale negativa (α_i>0), tutti gli esponenziali convergono a zero e, in base alla definizione, il sistema è *asintoticamente stabile*; se tutti i poli sono negativi, a meno di uno che è nullo (p_i=0) o di una coppia che è immaginaria (α_i=0) , l’esponenziale con esponente nullo dà luogo ad un termine costante mentre quelli con esponente immaginario danno luogo a termini sinusoidali, e quindi la risposta non converge a zero, ma non diverge: il sistema è pertanto *semplicemente stabile*; se, infine, almeno un polo è reale positivo (p_i<0) o complesso con parte reale positiva (α_i<0), l’esponenziale relativo a tale polo diverge, facendo divergere la risposta all’impulso: il sistema è quindi *instabile*.

Estendendo, con ragionamenti analoghi, le conclusioni al caso di poli multipli, si può formulare il seguente teorema:

Un sistema è:

asintoticamente stabile: se e solo se tutti i poli della sua funzione di trasferimento hanno parte reale negativa;

semplicemente stabile: se e solo se tutti i poli della sua funzione di trasferimento hanno parte reale negativa o nulla, almeno uno ha parte reale nulla, e tutti i poli a parte reale nulla sono semplici;

instabile: se e solo se almeno un polo della sua funzione di trasferimento ha parte reale positiva oppure ha parte reale nulla ed è multiplo.

L’analisi di stabilità si riduce quindi all’analisi della posizione dei poli della funzione di trasferimento. Esistono criteri per valutare se un polinomio (in questo caso il denominatore della funzione di trasferimento) ha tutte le radici a parte reale negativa, cioè nel semipiano sinistro del piano complesso. Ci limitiamo a dare una condizione necessaria (che, come tale, ha interesse solo quando viene violata).

Condizione necessaria perché il polinomio:

$$D(s)=s^n+\gamma_1 s^{n-1}+\gamma_2 s^{n-2}+\cdots+\gamma_n$$

abbia tutte le radici a parte reale negativa è che i coefficienti γ_1, γ_2, ..., γ_n siano tutti positivi.

Per esempio:

$$G(s)=\frac{s+2}{s^3+s^2+s-1}$$ non è asintoticamente stabile;

$$G(s)=\frac{s+2}{s^3+s^2+1}$$ non è asintoticamente stabile;

$$G(s)=\frac{s+2}{s^3+s^2+s+1}$$ non si può concludere nulla dalla condizione necessaria.

A completamento delle note sulla stabilità osserviamo che:

1. se il sistema è dato in forma di equazioni di stato, la discussione sulla stabilità può anche essere condotta sugli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}$. Infatti i poli della funzione di trasferimento coincidono con tali autovalori, in assenza di cancellazioni di radici nel formare la funzione di trasferimento. In presenza invece di cancellazioni, se quindi i poli sono un sottoinsieme degli autovalori di $\boldsymbol{A}$, la definizione di stabilità qui introdotta induce a ritenere inessenziali ai fini della valutazione della stabilità la posizione nel piano complesso degli autovalori cancellati (contano solo i poli). In realtà una definizione più generale di stabilità (stabilità alla Lyapunov), che fa riferimento al sistema espresso in termini di equazioni di stato, conduce alla conclusione che il sistema è asintoticamente stabile alla Lyapunov se e solo se tutti gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ sono a parte reale negativa. Potremo allora dire che se tutti i poli della funzione di trasferimento sono a parte reale negativa ma vi sono autovalori cancellati a parte reale non negativa, il sistema è asintoticamente stabile esternamente ma è presente una **non asintotica stabilità interna**.
2. In questo corso non si danno definizioni di **stabilità di stati di equilibrio** per sistemi non lineari, né strumenti per valutarla. E' tuttavia evidente che lo studio della stabilità del sistema linearizzato nell'intorno dello stato di equilibrio fornisce chiare indicazioni del comportamento del sistema non lineare perturbato rispetto alla condizione di equilibrio.

Esercizi

Esercizio 3.1

Si calcoli la funzione di trasferimento dall'ingresso *u* all'uscita *y* per la rete elettrica dell'esercizio 2.1, in cui si ponga *R*=1, *L*=1, *C*=1.

Esercizio 3.2

Si calcoli la funzione di trasferimento dall'ingresso *u* all'uscita *y* per il seguente sistema dinamico:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -x_1(t) - x_2(t) - 2x_3(t) + u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Esercizio 3.3

Si determinino tipo, guadagno, costanti di tempo degli zeri e dei poli per la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{2s - s^2}{(s+1)\left(s^2 + 6s + 8\right)}$$

Esercizio 3.4

Si discuta la stabilità dei sistemi descritti dalle seguenti funzioni di trasferimento:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+5} \qquad G_2(s) = \frac{3}{s^2 + s - 1}$$

$$G_3(s) = \frac{5}{s^4 + 3s^2 + 2s + 1} \qquad G_4(s) = \frac{8s - 1}{s^2 + s + 1}$$

Esercizio 3.5

Si scrivano le equazioni (nel dominio del tempo) di un sistema dinamico che ammette la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{3}{s+4}$$

Esercizio 3.6

Si calcoli l'espressione analitica della risposta all'impulso della seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{4s + 1}{s^2 + 5s + 6}$$

Traccia delle soluzioni

Esercizio 3.1

Trasformando secondo Laplace entrambi i membri delle equazioni, si ottiene:

$$sX_1 = -X_1 - X_2 + U$$

$$sX_2 = X_1 - X_2$$

$$Y = X_2$$

da cui, eliminando X_1 e X_2, si ottiene:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

Esercizio 3.2

Trasformando secondo Laplace entrambi i membri delle equazioni, si ottiene:

$$sX_1 = X_2$$

$$sX_2 = X_3$$

$$sX_3 = -X_1 - X_2 - 2X_3 + U$$

$$Y = X_1$$

da cui, eliminando X_1, X_2 e X_3, si ottiene:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Esercizio 3.3

Riscrivendo la funzione di trasferimento nella forma:

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{(1 + sT_{z1})}{(1 + sT_{p1})(1 + sT_{p2})(1 + sT_{p3})}$$

si ottiene:

$$G(s) = \frac{s}{4} \frac{(1 - 0.5s)}{(1 + s)(1 + 0.25s)(1 + 0.5s)} \ ,$$

da cui si deduce:

Tipo: $g = -1$

Guadagno: $\mu = 1/4$

Costante di tempo dello zero: $T_{z1} = -0.5$

Costanti di tempo dei poli: $T_{p1} = 1$, $T_{p2} = 0.25$, $T_{p3} = 0.5$.

Esercizio 3.4

G_1 e G_4 sono asintoticamente stabili (hanno i poli nel semipiano sinistro), G_2 e G_3 non lo sono, in quanto non soddisfano la condizione necessaria (per la precisione, sono instabili).

Esercizio 3.5

Una possibile (non unica) soluzione è la seguente:

$$\dot{x}(t) = -4x(t) + 3u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

Esercizio 3.6

Poiché la trasformata di Laplace dell'ingresso (impulso) vale 1, la trasformata di Laplace dell'uscita coincide con la funzione di trasferimento $G(s)$. Si applica il metodo di antitrasformazione di Heaviside:

$$Y(s) = G(s) = \frac{4s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3} = \frac{\alpha_1(s+3) + \alpha_2(s+2)}{(s+2)(s+3)} \ .$$

Confrontando i numeratori, una volta in $s = -2$ e una volta in $s = -3$, si ottiene:

$$\alpha_1 = -7, \quad \alpha_2 = 11 \ ,$$

da cui:

$$y(t) = -7e^{-2t} + 11e^{-3t} \qquad t \geq 0 \ .$$